

10 клас

1. Розглянемо чотирицифрове число, а також чотирицифрове число, що записане такими самими цифрами у зворотному порядку. Яку найбільшу кількість цифр 5 може мати у своєму десятковому запису модуль різниці таких чисел?
2. Розв'яжіть рівняння:

$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0.$$

3. Всередині квадрата $ABCD$ вибрано точку O . Квадрат $A'B'C'D'$ – образ квадрата $ABCD$ при гомотетії з центром у точці O та коефіцієнтом $k > 1$ (точки A', B', C', D' є образами точок A, B, C, D відповідно). Доведіть, що сума площ чотирикутників $A'ABB'$ та $C'CDD'$ дорівнює сумі площ чотирикутників $B'BCC'$ та $D'DAA'$.
4. Невід'ємні числа a, b, c задовольняють умову $a+b+c = 1$. Доведіть нерівність

$$(1-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 \geq 6\sqrt{abc}.$$

Чи може при вказаних умовах досягатись рівність?

5. Вчителька розсадила за круглим столом своїх учнів, серед яких було втричі менше хлопчиків ніж дівчаток. Виявилось, що серед усіх пар учнів, які сидять поруч, пар дітей одної статі у два рази більше, ніж пар дітей різної статі. При якій мінімальній кількості дітей за столом таке могло трапитись?

23 січня 2010 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,
а також будь-якими електронними засобами забороняється**
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені на сайті
www.matholymp.org.ua

10 класс

1. Рассмотрим четырехзначное число, а также четырехзначное число, которое записано теми же самими цифрами в обратном порядке. Какое наибольшее число цифр 5 может иметь в своей десятичной записи модуль разности таких чисел?

2. Решите уравнение:

$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0.$$

3. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка O . Квадрат $A'B'C'D'$ – образ квадрата $ABCD$ при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $k > 1$ (точки A', B', C', D' являются образами точек A, B, C, D соответственно). Докажите, что сумма площадей четырехугольников $A'ABB'$ и $C'CDD'$ равна сумме площадей четырехугольников $B'BCC'$ и $D'DAA'$.

4. Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$(1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2 \geq 6\sqrt{abc}.$$

Может ли при указанных условиях достигаться равенство?

5. Учительница рассадила за круглым столом своих учеников, среди которых было в три раза меньше мальчиков чем девочек. Оказалось, что среди всех пар учеников, которые сидят рядом, пар детей одного пола в два раза больше, чем пар детей разного пола. При каком минимальном количестве детей за столом такое могло случиться?

23 января 2010 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

**Пользоваться всевозможными внешними источниками информации,
а также любыми электронными устройствами запрещается**
Условия и решения задач по всем классам будут размещены на сайте
www.matholymp.org.ua