

11 клас

1. Знайдіть усі натуральні значення n , при яких виконується рівність:

$$-2^0 + 2^1 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + (-2)^n = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^{2010}?$$

2. У кубі розміром $11 \times 11 \times 11$ зовнішній шар одиничних кубиків пофарбовано у жовтий колір, наступний шар, що дотикається до цього зовнішнього жовтого фарбується у блакитний, наступний шар – знову у жовтий і так далі. Знайти загальну кількість жовтих та блакитних одиничних кубиків.
3. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло та має перпендикулярні діагоналі. Точки K, L, M, Q – точки перетину висот трикутників ABD, ACD, BCD, ABC відповідно. Довести, що чотирикутник $KLMQ$ рівний чотирикутнику $ABCD$.
4. Натуральні числа m, n такі, що число $(2^n + 3^m)$ ділиться на 5. Доведіть, що число $(2^m + 3^n)$ також ділиться на 5.
5. Знайдіть невід'ємні розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 1 = x^2 + xy, \\ y^2z^2 + 1 = y^2 + yz, \\ z^2x^2 + 1 = z^2 + zx. \end{cases}$$

23 січня 2010 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Користування довільними зовнішніми джерелами інформації,
а також будь-якими електронними засобами забороняється**
Умови та розв'язання задач по усіх класах будуть наведені на сайті
www.matholymp.org.ua

11 класс

1. Найдите все натуральные значения n , при которых выполняется равенство:

$$-2^0 + 2^1 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + (-2)^n = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^{2010}?$$

2. В кубе размером $11 \times 11 \times 11$ внешний слой единичных кубиков окрашено в желтый цвет, следующий слой, который касается этого внешнего желтого красится в голубой, следующий слой – снова в желтый и так далее. Найдите общее число желтых и голубых единичных кубиков.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и имеет перпендикулярные диагонали. Точки K, L, M, Q – точки пересечения высот треугольников ABD, ACD , соответственно. Докажите, что четырехугольник $KLMQ$ равен четырехугольнику $ABCD$.

4. Натуральные числа m, n такие, что число $(2^n + 3^m)$ делится на 5. Докажите, что число $(2^m + 3^n)$ также делится на 5.

5. Найдите неотрицательные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 1 = x^2 + xy, \\ y^2z^2 + 1 = y^2 + yz, \\ z^2x^2 + 1 = z^2 + zx. \end{cases}$$

23 января 2010 г.

На выполнение задания дается 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

**Пользоваться всевозможными внешними источниками информации,
а также любыми электронными устройствами запрещается**
Условия и решения задач по всем классам будут размещены на сайте
www.matholymp.org.ua